

経済方法論から見たノイマン

古典派か、それとも新古典派か

ザライ・エルヌー
ブダペスト経済大学

副題に掲げたテーマは、1958年にコルフで開催された資本理論会議で先鋭な形で提起され、以後、経済学者のプレステージにかかわる問題になっていた。この会議において、ソローはいわゆるノイマン・モデルについて、「新古典派の成長・資本理論の独自のモデルの一つ」という性格付けを与えた⁽¹⁾。二つのケンブリッジの間に交わされたその後の論争と決裂の歴史を知る者にとって、同じく会議の参加者であった周知の論客カルドアが、このソローの規定にたいし、つまりノイマンを新古典派に引きずり込む試みにたいし、舌鋒鋭く抗議したのは何ら驚くことではなかった。「ノイマン・モデルが、ヴィクセル、マーシャル、あるいはすべての新古典派の新たな意匠替えに過ぎない」という主張には、何の根拠もないと断言した。

このテーマをハンガリー・アカデミー会員就任講演に選んだことには、いくつか理由がある。何よりも、ノイマンその人にたいする敬意である。我々の認識ではノイマンは経済学者でない。20世紀の数少ない博学の天才であり、多くの学問分野で傑出した成果を生み出した人物である。唯一、純粋に経済学の仕事と見なされるものが、ここで対象にする1937年のモデルである。にもかかわらず、ノイマン・モデルの経済学的内容について留保した姿勢を示したサムエルソンですら、経済学への影響の大きさを容認せざるをえなかった。「突然、我々の領域に入り込んで来て、以後、そのテーマはけっして古くならないのだ」。ノイマンが優れたハンガリー人学者だという理由だけでなく、「客員経済学者」だということに、我々は誇りを持っている。

モデルはそれ自体で評価されるものでも、たんにその経済学的内容で評価されるものでもない。最初に1932年にプリンストン大学で講演され、その後1937年に出版されたモデルは、それ以前の重要な発展を統合し、かつ以後の発展を予測させただけでなく、相互に異なる学派（古典派-新古典派、ブルジョア学派-マルクス学派）の理論的共有点を解明し、かつそれらの決定的な分岐点をも示している。本講演では副題に示したような我々の専門分野で特徴的なシスマ（分派）や二分法について、簡単に触れることになる。この観点からも、ノイマン・モデルとその精神は、良き「触媒」になると考える。

数理経済学の応用、あるいは応用可能性をめぐるのは、クールノーの開拓的な研究（1838年）以後、経済学者や経済学方法論を扱う専門家の間で、激しい議論が繰り返されてきた。ノイマン・モデルは当時において比類の無いもので、最高度に凝縮された形式で、透明性と審美性の観点から見ても、1930-50年に数理経済学で生じた視角と方法論上の変化をもっとも美しく体現

したモデルの一つと言ってよい。この変化それ自体は、「科学モデル概念」において自然科学と数学の分野ですでに生じていた革命的な「変化」の一つの反映であり、その否定的あるいは肯定的な側面ともに、その後の経済学研究の形成に余すところなく影響を及ぼすことになった。

さらに付け加えておけば、ノイマン・モデルの登場は「数量」経済学の独立化と時を同じくしている。数理経済学と計量経済学（経済数理統計学）が、独立した数量経済学分野として確立する出発点は、計量経済学会の発足（1930年）とその学会誌 *Econometrica*（1933年）の発刊であり、まさに1930年代初頭である。この分野の専門家の一として、当然のことながら、本講演ではこの分野の独自な特徴についても議論したい。

本講演のようなテーマを限定した枠組みでは、複雑かつ興味深い問題群にさらに深く入り込むことはできない。したがって、私にとってもっとも重要と思われる諸問題に焦点を当て、手短かに仮説的に議論を進めることで、このテーマに関心のある聴衆をこの分野へ案内をしたい。

ノイマン・モデルにおける経済均衡

まず初めに、数学用語に不案内な聴衆のために、モデルを簡便化した図式の助けを借りて、以下の二つの「統計」表を理解することから始めよう。一つは、ある所与の時点の経済で観察される「生産」を含むもので、生産物と生産プロセスごとに区別されている (Q_{ij})。もう一つは、「その同じ期間」に費消された「支出」を計算したものであり、同じ分類にもとづいている (W_{ij})。ノイマンの前提によれば、支出のなかには当該生産部門に雇用されている労働力の生存維持に不可欠な「必需消費」も含まれている。ノイマンが前提し分析した経済では、生産（生産物の消費）は一つの期間から次の期間にわたって、「一様に」かつ「の比率」 ($1+$) で変化する（成長、停滞、縮小）。このように条件付けられた経済では、産出は常に当該期間末に現れ（1年周期）、次の期間（次期）に使用可能になる。ここから、生産バランスの均衡は次のような簡単な形式を得る。

$$Q_{i1}+Q_{i2}+\dots+Q_{ij}+\dots+Q_{im}=(1+)\cdot(W_{i1}+W_{i2}+\dots+W_{ij}+\dots+W_{im}), \quad i=1,2,,n \quad (1)$$

このような「擬似定常」経済ではいったん形成された「均衡価格比率」 ($p_i, i=1,2,,n$) は不変のままに留まる。ノイマンは均衡価格を、「単位価値の貯蓄（投資）に同じ大きさ利子（収益）、利潤」を保証する」と規定した。したがって、価格均衡は次の方程式で定義される。

$$p_1 \cdot Q_{1j}+p_2 \cdot Q_{2j}+\dots+p_i \cdot Q_{ij}+\dots+p_n \cdot Q_{nj} \\ = (1+) \cdot (p_1 \cdot W_{1j}+p_2 \cdot W_{2j}+\dots+p_i \cdot W_{ij}+\dots+p_n \cdot W_{nj}), \quad j=1,2,,m \quad (2)$$

行列代数を使うと、上記の関係式はコンパクトな形式を得る。

$$Q1=(1+) \cdot W1 \quad \text{および}$$

$$PQ=(1+) \cdot pW$$

産出表

| | 第1 プロセス | 第2 プロセス | | 第j プロセス | | 第m プロセス | 単位価格 |
|-------|------------|------------|--|------------|--|------------|-------|
| 第1生産物 | Q_{11} | Q_{12} | | Q_{1j} | | Q_{1m} | p_1 |
| 第2生産物 | Q_{21} | Q_{22} | | Q_{2j} | | Q_{2m} | p_2 |
| | | | | | | | |
| 第i生産物 | Q_{i1} | Q_{i2} | | Q_{ij} | | Q_{im} | p_i |
| | | | | | | | |
| 第n生産物 | Q_{n1} | Q_{n2} | | Q_{nj} | | Q_{nm} | p_n |
| 生産水準 | q_1 | q_2 | | q_j | | q_m | |

投入表

| | 第1 プロセス | 第2 プロセス | | 第j プロセス | | 第m プロセス | 単位価格 |
|-------|------------|------------|--|------------|--|------------|-------|
| 第1生産物 | W_{11} | W_{12} | | W_{1j} | | W_{1m} | p_1 |
| 第2生産物 | W_{21} | W_{22} | | W_{2j} | | W_{2m} | p_2 |
| | | | | | | | |
| 第i生産物 | W_{i1} | W_{i2} | | W_{ij} | | W_{im} | p_i |
| | | | | | | | |
| 第n生産物 | W_{n1} | W_{n2} | | W_{nj} | | W_{nm} | p_n |
| 生産水準 | q_1 | q_2 | | q_j | | q_m | |

産出係数行列 (K) と投入係数行列 (D) および活動水準ベクトル (q) を使い、絶対価格を単位産出・投入データで書き換えると、二つの関係式のシンメトリー、つまり双対性を得ることができる。

$$Kq = (1 + \dots) \cdot Dq \quad (1/a)$$

$$pK = (1 + \dots) \cdot pD \quad (2/a)$$

この最後の定式で、 pKq が正であれば (経済学的に予想されることであるが)、 $\dots = \dots$ 、つまり成長率と利子率 (利潤率) が相互に一致するというノイマン・モデルに「近似」したものを得る。これはシュンペーターが気に入ったノイマン・モデルの一つの特徴であり、長期にわたって単純再生産が続く (定常) 経済では均衡利子率がゼロになり得るという予測を支持するからである。この関係が実現するのは、後述するように、生存に「必需的な」消費以上の「奢侈財」が存在しない、つまり、すべての余剰は蓄積される場合に限られる。資本主義経済モデルでははたんに利子率でなく、利潤率でもある。そして、所与の経済が単純再生産にある場合でも、これは正の値をとり得る。

ここに描いた図式に、古典派やそれ以前の経済学に欠如している新しい内容がある訳ではない。たとえば、マルクスの二部門拡大再生産や生産価格の図式を思い浮かべるだけで十分である。だからと言って、既述した形式や内

容の類似性から、ノイマン・モデルが（直接的に）古典派の息吹を受けていると主張するものではない。問題の表現は端的であるが、それに答えるのは簡単ではない。その前に、方法論上の重要な問題に触れておきたい。

ex post 対 ex ante : 数理経済学の形成

方法論から見たノイマン・モデルの新規性はそのモデル哲学にあり、さらにそこから部分的に派生する分析の発展方向と分析技術にある。ノイマンの方法論的な革新性の背後には、ノイマンに先立つ革命的で全般的なモデル哲学の変革を見ることができる⁽²⁾。端的に言えば、それは古典物理学に特徴的な ex post のモデル構築からの決別である。この種のモデル哲学は彼以前の均衡理論の開拓者、リカード、マルクス、ワルラス、カッセルが採用した手法であり、ある意味ではヒックスやサムエルソンもまた同じ手法に立っている。後述するように、この面ではノイマンはウィーンの伝統に従っており、ワルドによって与えられたワルラス-カッセル型の一般均衡モデルの均衡解証明に特徴的に見ることができる。

もし「現実科学モデル」⁽³⁾の諸関係（たとえば上記の(1)-(2)の方程式体系）が、モデルの諸変数（正確にはそれによって代表される現象）間の「観察された」あるいは「潜在的に観察され得る」状態（例えば均衡）に必然的に維持されなければならない「法則的な」諸関係を表現するものであれば、このモデルを「ex post 視角」に立脚するものと名づけることができる。どのような諸力が、どのような行動規則にもとづき、どのような「論理的必然性」をもって所与の「特定状態」を生じさせるかについて、当該モデルが「説明」できると否とにかかわらず、このようなモデルの特徴づけは成立する。それはまた、前提されたメカニズムがそもそもそのような状態を「創出させ得るか否か」や、論理的（数学的）観点からいかなる「十分条件」によってそのような状態を創り出せるかということにも関係はない。

これにたいして、「ex ante 視角」と名づけることができるものは、諸変数や諸関係が「抽象的对象」であり、「数学的構造」を表現しており、その論理によって導出される可能な特性、あるいは確定される特性に合致する特定状態を叙述する場合である。ex ante の性格をもつモデルの定式化においては、「実際の現象」への言及はまったく「必要でない」。モデルの種々の可能な解法は、「当該の抽象モデル内部」において解釈されるべきものであり、したがって特定状態実現の論理的可能性はモデルの前提である「十分な」仮説によって保証しなければならない。

ex post 型モデルは基本的に「記述的」性格をもち、多くの場合、「直感的-帰納的」なアプローチに依拠している。ex post 型モデルの有効性（正当性）の「不可欠な基準」の一つは、仮説や構成要素の「現実妥当性」である。つまり、モデルの現象（変数、パラメータ）はすべて観察可能なものであり、測定可能な「経験的」カテゴリーである。この種のモデルのもう一つの主要

な基準は、モデルの現実適用性、つまり「識別可能性」、「数値化可能性」、「管理可能な予測適用性」である。モデルの現実的適用では、多くの場合、所与の数値的特定化（較正モデル）が観察される状態（モデルの解法として得られる）を再生できるか、できるとしたらどれほどの精度で可能かが問題となる。

ex ante 型モデルは、記述するだけでなく、当該状態を形成する諸条件の「説明」を与える。したがって、この種のモデルの有効性を判定する第一の基準は、内的論理の整合性、つまり「理論的純粋性」であり、これは公理的な構築によって保証される。こうした基準に比べて、経験的なテストや実際の予測への適用性の基準は、それほど重視されない。ex ante 型モデルの構築においては、「仮説的-演繹的」アプローチの原理が要請される。ex ante 型モデルは、現実的過程を機能的アナロジーのレベルで記述することになる。モデルに記述される諸現象（変数、パラメータ）は、「アприオリ（先験的）な」カテゴリーであって、「経験的な」カテゴリーではない。したがって、基本的な諸仮説や諸関係の実証的な検証性や現実反映性は、モデルの有効性の必要条件ではない。現実の現象と同一視することができるのは、出発モデル全体ではなく、そこから導出され特定の条件下で形成される状態（たとえば、均衡状態やその特性）だけである。

公理的方法の普及は自然科学とそれに利用される数学を大きく変えることになり、その影響が次第に経済学分野にも及ぶことになった。それは数理経済学が相対的に独立した学問分野となる時期に一致している。とはいえ、社会科学分野では、経験的な実験やテスト（ポッパー-ラカトシュ型の検証-偽証）の可能性は限定される。こうした理由から、社会科学分野においても、公理的手法やそれと密接に結びついている数学言語や手法の有用性について、極端な主張に出会うことがある。

公理的手法の普及によって、科学的知識の拡大発展における「経験的-帰納的な発見」の役割が後景に退き、「仮説的-論理的な知識創出」がより大きな役割を得ることになった。「無から新しい世界を生み出した」⁽⁴⁾というボヤイのユーフォリアに似た感情が、これをまさに表現している。後年になってノイマンが警告したように、このような極端は危険を孕んでいる。「優れた数学者の発想は経験から派生するものであって、数学の厳格かつ絶対的で、不変かつ人間の経験から隔離された概念の存在にあると考えることはできない。...もし数学の原理が経験的な源泉から遠く離れることがあれば、...これは大きな危険を孕んでいる。それはやがて耽美主義へと変化し、純粋に“*l'art pour l'art-à*”（芸術のための芸術）となる。...経験的な源泉から遠く離れたり、抽象化の＜影響＞によって、数学的对象は退廃化の危機にある。...最初は常に古典的だったものが、バロックに変身する徴候が現れれば、それは危険信号である」。

経済学説史から見て興味深いのは、経済学者で統計学者のスルツキーこそ、ヒルベルト（公理的、形式主義的）プログラムの初期の追随者で開拓者であったという事実である。1915年の著名な論文で、次のように記述している。「経済科学を信頼し得る基礎に据えたいと思うなら、心理学的な仮定や哲学的な仮説から完全に切り離すことが必要である」。スルツキーは、目的的で合理的な人間行動を扱う「形式的プラクシオロジー（行動学）」の一分野として、「純粹」経済学を捉えたのである。

二つの大戦間期におけるプラクシオロジーの開拓者は、オーストリアのフォン・ミーゼスであり、ポーランドのコタルピンスキーとランゲである。ランゲにかんして言えば、後年になって、スルツキーに反対の立場を鮮明にしたことを忘れてはならない。その立場から、「補助科学」であるプラクシオロジーを経済学と混同していると、新古典派を批判したのである（ランゲ、1964年）。つまり、ノイマンと同様に、ランゲもまた二つの学問領域の順位をひっくり返して、経済学に公理的な形式主義的アプローチを適用することの限界を強調したのである。

アメリカにおける近代「数量」経済学の形成において、計量経済学会の成立と並んで決定的な役割を果たしたのは、コールズ委員会（Cowless Commission）の組織化（1932年）である⁽⁵⁾。設立時における研究グループの主要な目標は、経験的研究とその方法論的開発であった（世界大恐慌がコールズをこのような研究援助に向かわせた）。ここに誘われた経済・数学研究者には、初め戸惑いが見られた。しかし、予期できない偶然の事件が、アメリカの数量経済学研究者を完全に別の方向に向かわせることになった。

その一つの重要な要因が、第二次世界大戦前から戦後にわたるヨーロッパからアメリカへの研究者の大量移住である。何波かにわたる移住を通して、多くの研究者が直にコールズ委員会に職を見つけるか、その「周辺」に落ち着き場所を見つけた。さらに、この要因をさらに強めたのが、戦時の軍事研究機関における「オペレーション研究」のような自然科学と経済学領域の応用数学との間に構築された集中的な共同作業である。その多くは戦後も継続され、それが自然科学分野で発展させられた数学的手法の普及と受容を加速化し、他方でこのような研究に携わる数学者の経済学あるいはオペレーション研究分野への転身を促すことになった。この双方の発展によって、アメリカにおける数理経済学者の「数量的変異」が「生存と増加に必要な臨界量」の水準に達したのである。

オペレーション研究に従事することになったヨーロッパの研究者で、経済学や経験的な志向性ない者が、アメリカの経済学者に馴染みのない視角や方法論を持ち込んできた。すなわち、ヒルベルト・プログラムがそれであり、さらに形式的な完全化を目指したブルバキ学派の数学手法や数学理念がそれである。これによって、コールズ委員会周辺に集まった研究者の経済学にたいする把握や手法が変容を被ることになった。現実科学を超えて、純粹・形

式科学への方向に向かい、方法論的には古典物理数学（局所分析）から現代的な「大局的凸分析」へと向かったのである。

委員会は 1943 年にシカゴに移り、マルシャークとクープマンズが指導する時期は、まだ統計的で経済計量的な実践的な研究計画を重視していたが、次第に「経済測定的一般理論」や「方法論上」の問題が研究目標に設定されるようになっていった（Weintraub、1983 年）。とはいえ、1949 年にクープマンズが組織した「活動分析」会議では「現実科学研究の諸要素」が並存している。たとえば、公理論的理論生成、数学定理、計算アルゴリズム、現実への応用というテーマが同じようなウエイトを占めている（Koopmans、1951 年）。しかし、これ以後、1940 年代の終りから 1950 年代初頭にかけて、研究方向は急展開を遂げ、非建設的で抽象的な経済学研究に向かって進むことになった。

一般均衡の公理論的モデルの完成、均衡存在、効率性の証明（Arrow-Debreu、1958 年；Mckenzie、1954 年）や、安定性の証明（Arrow-Hurwicz、1958 年；Arrow-Block-Hurwicz、1959 年；Scarf、1960 年）は、「新古典派数理経済学」の「ハード・コア」を固めることになった。この流れは、「論理的厳密さ、優雅さ、審美性」の名のもとに、アメリカの主要な経済学部において、代替的なアプローチ（厳格性を欠く、経験的で、歴史-社会的な性格をもつ）を片隅に追いやった。ミロフスキー（1988 年）が述懐しているように、「1940 年代と 1950 年代に経済学の数学的応用に異議を唱えた者には個人攻撃が加えられ、留保の姿勢を示した者には分析を理解しない者とレッテルが貼られ、... 事は世代間の問題に転化していった」（61 頁）。

経済学への数学の適用を支持する二つの主要な主張がある。一つは、数学的（公理論的）論理の厳密性こそ、真理を導く強制力であるという主張である。今一つはガリレオの有名な定理、つまり「宇宙は数学言語で描くことができる」という主張である。この最初の議論は否定しがたいが、二番目の議論は現代の科学哲学にもとづけば証明不能な命題である。自然科学分野で人類に多くの発見をもたらした（といっても無限の能力ではない）科学的手法が、社会科学にどれほど適合できるのか、どれほど適用可能なのか、それが本当に有益であるかについて、今日においても依然として、明瞭な回答が与えられているとは言えない。とすれば、そのような手法に異常に大きなウエイトが置かれる現象を、無条件に歓迎できないだろう。

経済均衡概念とモデルの発展

古典派と初期新古典派の経済学者は、古典力学の影響のもと、直感的-帰納的な概念把握にもとづいていた。市場によって組織される商品生産の均衡（調和）を創出するというビジョン、そこに効率的な強制力を見るビジョンに、自然法則のアナロジーを見出したのである。彼等にとって、マクロレベルの均衡の存在は「経験的な事実」（別言すれば、ex post 型モデルの出発的仮説）であった。

古典派経済学理論は重層的である。マクロ水準では、主要な経済要素（価格、生産、消費）の法則的連関を全体的に記述する。このマクロレベルの記述は、諸要素のミクロ水準における種々の説明論理によって補完されている。もっとも、これらの因果的説明をマクロ水準の理論に組み込んだり、あるいはマクロ状況の特徴がミクロの説明論理から直接に導出されているわけではない。マクロ水準の分析では、そのような記述に代わり、ミクロメカニズムの予想される（長期の）諸影響が、対象になるだけである（たとえば、利潤率・賃金・地代の均等化、経済部門の均等・不均等発展）。

新古典派の一般均衡論は、このようなマクロとミクロの二水準の均衡理論、つまり説明の二重性を克服しようとしたのである。この決定的な歩みを記録したのが、ヒックス（1939年）とサムエルソン（1947年）で、彼等は限界学派の効用と生産関数にもとづく最適化モデルにもとづき、生産と消費の決定を説明するミクロ水準の理論を、ワルワスの一般均衡の枠組みに埋め込んだ。同時に、ヒックスとサムエルソンは均衡状態の論理的可能性（存在）の正確な証明を与えることはなかったし、また経済システムを均衡状態へ動かす、あるいは接近させるアルゴリズムや適応ルール（動的安定性）の証明を与えることもなかった。

つまり、ヒックスやサムエルソンはいまだ古典派の *ex post* 型モデルから *ex ante* 型モデル構築への移行期にあり、一般均衡に特徴的な方程式体系の正の解の存在は仮定されるに留まり、証明されていない。均衡解の存在の論理的可能性について、彼等は古典的な方程式の数え合わせに依拠しているだけで、それは *ex post* 型モデル把握の一要素として多くの批判を受けた。均衡存在の抽象的な証明に代えて、ヒックスとサムエルソンは物理学で開発された「比較静力学」の局所分析にもとづく手法を経済学に応用した。すなわち、仮説的な均衡状態から出発して、外的条件のわずかな変化によって、均衡状態がどのように変化するかを分析したのである。

こうした試みにおいても、局所分析を成功裏に実行するために不可欠な数学的諸条件の特定化や分析には至らなかった。もちろん、モデルの応用（同定）においては、数学的諸条件を満たす特定化（関数の形状）が必要であり、したがって観察された状態（パラメータの数値化のベースとして採用された均衡条件水準）が本当にモデルの諸条件を満たしているかをチェックするモデルの較正が必要であることは、認識されていた。1970年代後半から、計算可能な一般均衡モデル（CGE、Computable General Equilibrium）の作成が普及するようになり、モデルの特定化や較正の手続きにかんする知識を得ることになったし、同時にその可能性と限界についても認識できるようになった。したがって、このモデルの実践的応用は、必然的に、モデルの可解（存在）問題や解集合の数（一意性）の問題を提起するはずのものであった。

一般均衡理論モデルの実践的応用という要求や可能性は、1940年代では、いまだ彼方にあるものだった。それゆえ、その発展は別の方向に向かうこと

になった。ヒルベルトの公理的理論構築プログラムや「ブルバキイズム」に沿った数理経済学が支配的精神になるに従い、一般均衡理論の理論的有効性（科学的真理性）の証明は、その実際的应用にではなく、論理（数学）の一貫性の証明に求められるようになった。その成果として、一般均衡理論としての特質を備えた現代（公理的、ex ante）モデルが生まれ、モデルの均衡解の存在可能性やモデルの論理一貫性が証明された⁽⁶⁾。

他方、コルナイ（1971年）の著作*Anti-equilibrium*からも周知のように、均衡理論の目覚しい発展には、大きな代価が伴った。すなわち、論理的一貫性、数学的エレガンスや審美性の要請が、経験的な適合性より上位におかれることになったのである。均衡存在や安定性の数学的証明は、心理学や実証の基礎に立って正当に批判し得るし、批判された「十分条件」を受け入れて初めて可能になるはずである。しかしながら、現代新古典派的アプローチは次第に経済学研究者・教育者の支配的な趨勢となっていく。このプロセスには科学社会的な複合的原因が作用している。本稿の枠組みでこれを分析することはできないが、重要な原因のうちいくつかを指摘しておこう⁽⁷⁾。

その一つの原因は良く知られた事実にある。つまり、社会科学の領域では、相互に競い合う理論の「オブジェクト」（自然科学のほとんどの領域で採用される基準に従うような）比較・評価が、ほとんど不可能であるという事実である。したがって、実際的な応用価値ではなく、「流行」のようなものが選択を誘導する。

もう一つ、より重要な原因は、数学的アプローチが否定しようもない「科学的アピール」をもつことに求めることができる。とくに数学的な訓練途中にある専門家に影響を及ぼしたし、さらに経済学の領域でキャリアを積もうという人々にも（方法論的な視角の転換が起きた時期だけでなく、それに続く時期においても）魅力を与えた。

そして最後の原因として、もっとも重要なことは、数理的手法と同じほどの魅力をもつ代替的な理論アプローチが常に欠如していたことを上げることができる。

ノイマン・モデルの経済学的基礎

ここで主題に戻ろう。ノイマン・モデルの経済学的基礎を決定するのは容易でない。というのは、モデルを構成している均衡関係はあまりに一般的なので、どの理論の基礎としても利用できるからである。「どのような諸力が、どのようなメカニズムで、所与の経済に、このような条件で定義される均衡状態を惹き起こし得るのか」を説明する諸関係が、モデルの内にも背後にも欠如している。適当な解釈を施すことによって、モデルは小商品生産経済（「人民」資本主義）にも、資本主義経済にも、あるいは社会主義経済にも適確なものとなり得る。

ノイマン自身の仕事や、彼の同時代人たち（K.メンガー、カルドア、マルシャク、モルゲンシュタイン）の回想も、その経済学の理論的基礎や発想について、ほとんど何も教えてくれない。数理モデルの経済学的解釈にかんして、わずかに「このような仮説がどの種の理論モデルに対応しているかは、明白である」と述べているが、これがどれほど明白でないかは、後の解釈の試みや論争がそれを証明している。ウィーンのメンガー・サークルとの密接な関係やドイツが仕事場だったことを考えると、ノイマンはなによりもまずドイツ語文献で、直接（文献読解）あるいは間接（セミナーへの参加、議論や会話）にモデルの経済学的解釈を「発見」できたはずである。

「発見」という用語を使ったのは偶然ではない。というのは、数学的形式の源泉については、疑問の余地はないからである。ノイマンはモデルで用いた双対形式やミニマックス定理（鞍点）の手法を、1928年に出版された2人ゼロ和ゲームの均衡にかんする論文でも成功裏に採用している。そこでは、鞍点（均衡）の解法条件を、いわゆる熱力学の関係を適応させて、補間法で補足された不等式体系によって与えている。つまり、数学的形式は「所与」のものであり、いつでも再構成できるものだった⁽⁸⁾。

ノイマンとメンガー・サークルにとって、多分、経済学的解釈よりも方法論の方がはるかに重要だったと考えられる。そのことは、論文の題名そのものが示している。つまり、「一つの経済方程式体系」と、「ブラウアー型不動点定理の一つの一般化」が同等に並べられている。そのことは、ノイマン自身が残した注解（Morgenstern、1976年）からも明瞭で、経済学者は古典力学から採用した数学手段を超えて、より現代的で適確な数学手法を使うべきだと強調しているのである。

カルドアの回想（1989年）によれば、ブダペストで出会った折に、ノイマンは短くかつ要約された経済学文献を所望したので、ヴィクセル、カッセル、ベーム-バヴェルクの文献を紹介したという。さらに、同じ回想によれば、ノイマンは、限界学派が代替性を強調しすぎて、成長にとって補完的な条件を形成する諸力を軽視していると批判していたという。さらに、ワルラスの均衡条件方程式体系の記述についても、「経済学的観点から無意味な負の価格を生み出し得る」と批判したという⁽⁹⁾。

同時代人の回想のうち、マルシャクは1920年代末にベルリンで開催されたセミナーのことを記している。このセミナーはハンガリーの物理学者スィラードが組織したものであったが、そこでマルシャクは、ワルラスとカッセルを基礎に、一般均衡の数学的方程式体系の記述の可能性について報告したようだ。ノイマンは報告の間、逐一質問していたが、遂にはセミナーを中断させて、「均衡の定義では、方程式体系ではなく、不等式体系を使うべきだ」と議論し始めたという。このセミナーでのノイマンの言動から事後的に分かるが、この頃には経済学的な双対性について、大体の定式化が出来上がっていたようだ。トンプソン（1989年）によれば、モルゲンシュタインは、ノイ

マンがどこかでレオンチェフの論文（1928年）に接した可能性があり、そこから経済学的解釈のヒントを得たのではないかと怪しんでいたという。

確かに不透明な部分は残るが、ノイマン・モデルの経済学的解釈にかかわるこれまでの「証拠」や議論は、私見によれば、どれも決定的なものとは言えない。周知のように、ノイマンは系統的に経済学の問題に携わっていたわけではない。天才的数学者にとって、相互に対立しあう経済システムの分析視角（古典派と新古典派）を特徴づける解釈のニュアンスの差がどれほど重要だったか疑わしい。すでにゲーム理論の均衡分析で数学モデルと方法論的な枠組みが与えられており、ノイマンはそこに埋め込みが可能で、ミニマムに必要な経済的解釈を探ったものと考えられる。ここで忘れてならないことは、ノイマンがヒルベルト数学の強力な普及者であった1920年代は、ノイマンにとってヒルベルト・プログラムの精神に則り、できるだけ広範な分野で数学的「メタモデル」の価値を引き上げることが重要であったことだ。

クルツとサルヴァドーリ（1995年）は、あまり知られていないが、だからこそ非常に興味深い解釈の可能性に注意を喚起している。それはノイマン・モデルを社会主義タイプの経済に結びつける仮説的な解釈である。彼等の推測によれば、フロベニウスの弟子で社会主義に傾倒していた数学者のレマクとノイマンは同時期にベルリンに滞在しており、1929年のレマクの論文を通して、経済均衡の数学的記述の可能性についてヒントを得たとする。当時のベルリンの数学界ではレマクの論文が大きな話題になっており、ノイマンもそれに接することができたというのが、クルツ等の推測である。

レマクが描いた理論とモデルは、彼自身が指摘しているように、小商品生産や社会主義経済のケースとして解釈できる。その意味では、ランゲとパローネの著作として知られる方向にあるものだ（Lange, 1936年）。その数学モデルは部門分割のない、単純再生産（定常経済）のケースを描いている。ノイマン・モデルで $(1/a)$ と $(2/a)$ で $= = 0$ および $K=E$ と簡単化すると、モデルの特殊ケースとしてレマンのモデルが得られる。もっとも、このモデルは20世紀の初めにドイツに移住したドミトリエフ（1898年、1904年）の成果に代表される「ロシア学派」（ポルトケヴィッツ、1907年；シャラソフ、1910年；レオンチェフ、1928年）のモデルに近い。そして、このロシア学派がリカードの信奉者だったことは言うまでもない。こうして、クルツとサルヴァドーリはレマクと伝統的な古典派と結びつけ、さらにレマクを通してノイマンと古典派を結びつける。

レマクのモデルはその前提的仮説の結果として、ノイマン・モデルより単純化されたもので、分析に必要とされる数学的手法も同様に単純なものであった。そのモデル構築視角は自然科学で訓練を受けた初期の数学者のそれに比べても劣るものであった。クルツとサルヴァドーリによれば、レマクのモデルはベルリンの数学界で拒否反応にあったが、それはたんにイデオロギー的なものだけでなく、方法論的な問題があったと考えるべきだろう。クルツ

とサルヴァドーリは多くの記述比較を通して、ノイマン・モデルは同僚数学者が受けた批判にたいする「一つの回答」だったと推測する。この推測が根拠のないもののように見えても、最終的な結論には同意し得る。„Se non è vero, è ben trovato”（当たらずとも遠からず）という所だろうか。

他方、もしノイマンが資本主義経済の均衡条件をモデルで分析したと考えると、その直接的な理論的基礎をどこに求めるかは明瞭でない。周知のように、1945年にカルドアがノイマン・モデルの英語版の準備備程で、シャンペローネにモデル解釈の前書きを付けるように求めた。シャンペローネは古典派（リカード、ルクス）のサプライ・アプローチが、モデルの基礎にあることは「明瞭だ」と記した。

これにたいして、サムエルソン（1989年）はその独自の解釈を「優れたもの」と評価しながら、シャンペローネの解釈の妥当性を疑問視し、その誤解の源泉を、反限界学派で反新古典派のカルドアとスラッフアの偏見に満ちたアドヴァイスに求めている。

これにたいして、アロー（1989年）は、「カッセルから出発していることは、きわめて明瞭なこと」と断言している。数理経済学説史の著名な研究者であるプンゾは（1989年）は、ノイマン・モデルの経済学および方法論の直接的な基礎は、ウィーンのメンガー・サークル（シュレジンジャー、ワルド）に求めなければならないと考えている。この点については後述するが、その前に新古典派との親近性の問題について、考察したい。

古典派-新古典派の二分法とノイマン・モデル

シャンペローネの古典的解釈を否定した文献において、サムエルソンは一般的な新古典派モデルから、ノイマン・モデルのもっとも本質的な命題を詳細に引き出している。サムエルソンはこれによってコルフ会議におけるソローの命題を証明しようとしただけでなく、一時期のクープマンズの命題（1974年）の基礎についても注意を喚起したのである。つまり、クープマンズは、一方でノイマン・モデルを「あまり良くない経済学」と評価しつつ、新古典派的方法論と親近性のあるノイマンの「技術的」革新について回想している。

サムエルソンにとって、この論証が彼個人にも長年の課題であったことを隠していない。サムエルソンは1940年代の初めにハーヴァード大学で開催されたノイマンの講演に参加した。そこでノイマンが強調したことは、新しい数学的分析手段を応用することの必要性であった。それにたいして、サムエルソンは、「当該の問題はすべて、周知の極値定理でも扱えるはずだと思うのですが」と質問した。ノイマンはこの質問に手短に、「そこの若い人。タバコを一服吹かしてみたまえ（もう一度、よく考えてみたら）」と答えたという。サムエルソンは先の論文の中でこのことに触れ、「ノイマン精神は一

服の清涼剤として、私の中に残っている」と記している。話半分の真実はあろう。

このように、新古典派の巨匠たちがノイマン・モデルの経済学的重要性をあからさまに「貶める」のにたいし、数理経済学説史のもう一人の権威であるワイントラウブ（1983年）は、「ノイマン論文は...数理経済学において何よりも重要な（single most important）もの」と評価している。見た目にはまことに簡潔なノイマン・モデルが、これほど異なる評価を受けるのは何故だろうか。明らかに、望むと望まないとかかわらず、既述したように、時代は経済学の内容的方法論的な変革の沸点に達していたことから説明される。その変革の一つの帰結として、古典派と新古典派との対立が鮮明になったのである。

この二つの学派の間に存在する視角の相違を簡単に特徴づけるのは難しい。その前に、ここで言う「古典派」はミルやマルクスで代表されるような巨匠たちの時代、つまりすでに歴史として終わった時代を意味しているだけではないことに注意されたい。ここでは、古典派の伝統を受け継ぐあらゆる時代の経済学者を指している⁽¹⁰⁾。そのような伝統は、新古典派の登場以降も、消滅することはなかったし、そればかりか、その再生がこの20年間に観察することができる。したがって、ルーカスが新古典派のマクロ理論に「新しい古典派」という表現を占有しないとすれば、我々の「古典派」はより正確には「旧古典派と新しい古典派」と言うべきだろう。それよりうまい名称がない場合には、「ネオリカード派」、あるいはサムエルソンが使った「修正古典派」とも呼称される。

この学派は、ハーコートの優れた概説論文（1969年）と著書の題名「二つのケンブリッジ間の論争」から生まれたものである。この有名な論争の頂点の一つが、コルフ会議であった。その論争はロビンソン女史の1953年の論文に始まり、1960年代に頂点を迎えた。この論争は初め、イギリスで熱気を帯び、次いで次第に大陸の経済学者グループを巻き込むことになり、1970年代と1980年代を通して、様々な命名（ネオケインズ学派、ネオリカード学派）を伴い、学派形成の潮流を惹き起こした。

ラカトシュの表現（1970年、1978年）に従えば、非常に良く定義された「研究計画」⁽¹¹⁾によって、「修正古典派」と命名できるという。まったく同じ意味でというわけではないが、筆者もまたラカトシュの社会学的発想にもとづく用語法を使いたい。この手法を使うと、激しい反新古典派学派がどのように組織されたかを非常に良く描くことができる。相互に競い合い、時には闘いあう研究計画を叙述するために工夫されたラカトシュの用語法を用いることで、サムエルソンの言う反改革の「修正主義者」、つまり攻撃的で傲慢なアメリカの支配的新古典派陣営に対抗する一群の西欧経済学者の感性をうまく表現することができる。新古典派の経済学者に比べ、これらの学者はハンガリーでそれほど知られていないが、この陣営の数名の名前を列挙する

と、次のようになる。スティードマン（イギリス）、ガレグナーニ、サルヴァドーリ、パシネッティ（イタリア）、クルツ（オーストリア）、フラッシュェル、シェフォルド（ドイツ）、ビダル、ドゥメンニ、レエヴィ（フランス）、それから世界市民とも言えるグッドウィン（アメリカ-イギリス-イタリア）⁽¹²⁾。

1990年代になって、「修正古典派」の潮流は学派としての体裁を整えることになった。ラカトシュの用語を使えば、「ハードコア」、「防御ベルト」、自らの「出自」を証明する「聖者と使徒」（主としてリカード、それに続いてスミス、マルクス、ドミトリエフ、ボルトケヴィッツ、シャラシヨフ、レオンチエフ、ノイマン、スラッフア）が形成され、それ相応の質と量を備えた出版物が学派の研究を記録する。この学派を代表する学者の数学的知識は新古典派のそれに劣るものではないが、抽象的でアルゴリズム化できないような数学的手段の応用には、抑制的な姿勢をとっている。

さて、旧および新しい古典派経済学者の「ヴィジョン」や経済把握の重要な諸要素について、以下に列挙してみよう。

- (1) 商品生産の循環的性格の強調（「商品による商品の生産」、スラッフア、1960年）。
- (2) 自然資源の限界による価格と生産への影響を二次的なものと捉え、それに一般的な傾向を修正する役割のみを与える。
- (3) 蓄積された「人工的」資源（資本財）量を漸次的に緩和できる限界と見なし、その時間的かつ相対的な狭隘さを考慮する。
- (4) 生産要素の「正常」（均衡）価格を、相互に異なる（非対称的）方法で、分配理論と密接に結びつけて説明する。
- (5) 商品生産の循環性および労働力の実質賃金の外生的（社会的）決定から派生する、社会的余剰の配分として分配を解釈する。
- (6) 長期の「移動」均衡（吸引の中心）の形成にかんする理論では、生産（供給、生産費）の役割を決定的なもの見なし、消費者需要などの効用的観点は二次的なものと見なす。
- (7) 需要と供給の間に生じる種々の方向や強さの「緊張」は、長期均衡の周辺にある短期の変動にのみ、強い影響を与える。
- (8) 常時に存在する（出発的）在庫、技術的選択肢、代替性可能性の役割は副次的なもので、その影響は景気循環に現れる。

「旧古典派」は膨大な経験的歴史的な言及による例証によって、その理論をエッセイ的に表現したと言える。彼等においては、数量的関係は例証を超えるものではなく、多くの算術計算を通して示された。これにたいして、「修正古典派」は古典派理論の再定式化や発展のために、現代数学的モデルや手法を使用している。

次に、前期新古典派および現代新古典派のアプローチの特徴を列挙してみよう。

- (1) 供給にたいして需要要素、費用にたいして効用や狭隘性の役割を強調する（とくにオーストリア学派）。
- (2) 生産要素の三大グループ（労働、資本、自然資源）が生産に果たす役割を対称的に捉え、これらの均衡価格を狭隘性や間接的な効用原理もとづいて決定する。
- (3) 価格形成において、財の代替性の役割や、需要・供給の連続的で即時的な変化の役割を第一義的に捉える。
- (4) 技術の選択可能性、消費者選好、初期在庫を外生的な附存条件をみなす。
- (5) 合理的経済人を仮定することで、経済の均衡状態に向かって作用する諸力を、代替可能な選択肢の最適組合せの原理から導出する。
- (6) オーストリア学派とマーシャルを除き、一般均衡の統一的で単一水準の、閉じた、社会的・歴史的・心理的な要素を完全に無視した純理論的枠組みの中に、分析を組み込む。
- (7) オーストリア学派とマーシャルを除き、一切の留保なしで他の学問分野、とくに物理学で開発された数学的手法を採用し、自然科学を理論的かつ方法論的な理想型とみなす。

このように見ると、ノイマン・モデルは、「ローザンヌ-イギリス連合」（ワルラス、ジョヴォンズ、パレート）、オーストリア学派のメンバー、ベーム・バヴェルク、ヴィーザー、スウェーデン学派のヴィクセル、カッセルなどの新古典派と親近性をもっているというより、古典派の伝統により近くかつより直接的な関係にある特質、少なくとも四つの本質的特質をもっていると結論しなければならない。それらは以下の通りである。

- (1) 商品生産の循環的特質の強調。
- (2) 必要消費（再生産）概念にもとづく労働力および労働賃金の把握（限界概念によらない）。
- (3) 資本を一定の構成をもった生産手段の形式で描くことで、資本は価格から独立した自然の大きさをもたない。
- (4) ノイマンが明示的に前提しているように、経済発展の可能性に限界を与えるのは、自然資源（労働力も含まれる）の潜在的狭隘性ではない。

以上の中で、とくに生産要素の扱いは、新古典派の把握とは大きく異なっている。同時に、ノイマン・モデルは、重要な新古典派の「ハードコア」に属する要素を完全に欠いている。

- (1) 需要要素の完全な受動性（個人消費および生産消費の構造は所与であり、蓄積需要は生産構造のみに依存する）。
- (2) 供給と需要の構造を説明する連続的な代替可能性の仮定は、限定的な役割を果たしているにすぎない（技術の定義において）。
- (3) 効用概念について、言及すらない。
- (4) モデルには生産を潜在的に限界づける経済外の在庫は存在しない。

以上の諸点は、ノイマン・モデルと新古典派に親近性を求める見解の妥当性を疑わせるに十分である。とはいえ、依然として、古典派との親近性の源泉も、それほど明瞭でない。後に触れるメンガー・サークルとの関係も、このことを明らかにしないが、もう一つの方法論上の問題を手短かに議論してみたい。

再論：純理論と経験的關係について

これまで、多くの学派や潮流相互の差異を捨象して、大筋で共通する特質を概観してきたが、ここでさらに純理論と経験的關係の問題や、それにかかわる数理経済学の役割の評価について、補足的な考察をおこなっておきたい。これらの諸問題は、古典派-新古典派の問題に直接かかわるものではないが、諸潮流間に大きな相違が観察される。

ワルラスはその主要著作の題名（純粋経済学要論）が示しているように、経済学を「純粋」科学と捉え、常に数学の有用性や純粋科学の理想の普及に努めた。このような把握の背景には、19世紀後半に数学と物理学で生じた転換の影響が見られ、仮説-公理論的演繹法の原理が牽引力として現れている。

ここで注意したいのは、ワルラスが一般均衡理論を「発見」したのでも、その数学的モデルを最初に構築したのでもないことである。クールノー（1838年）は部分的な市場均衡の検証に、物理数学の手法を用いたが、部分市場均衡は一般均衡の一部にすぎないことを明瞭に認識していた。にもかかわらず、クールノーは一般均衡の数学的体系の既述を有意味で時宜に適ったものとは考えなかった。その理由をこう記している。「全体システムの観察は…数学的分析や実際の計算手法の可能性（能力）を超えるものであり、モデルのすべての常数パラメータに数値を入れることができたとしても、それは敵わないことである」。

これにたいして、ワルラスは経験と決別する勇気をもって、当時の物理学で流行していた「純粋科学」精神で、経済学を抽象的で演繹的かつ形式的な理論として扱ったのである。こうした科学理念において、ワルラスはジョヴォンズという大きな援軍を見つけた⁽¹³⁾。ジョヴォンズは近代的で無謬的な方法で、その把握の本質を定式化している。「観察された一定の事象から、これを制御する法則にかんする仮説を定式化し、さらにこの仮説から出発する演繹的手法によって予想される結果を説明し、その後、これらの結果を疑わしい事象と関連させて分析する」。

ワルラスが「政治経済学の巨大な白象」と鼻屑にしていたマーシャルは、経済学の「数学化」や一般均衡の枠組みへの応用の有効性に、けっして万全の信頼を置いていなかった。マーシャルは数学的訓練を受けた学者であり、数学の利用を自らの「速記」として利用していたが、それでもその有効性の限界を明瞭に意識していた⁽¹⁴⁾。一般均衡モデルにかんするマーシャルの理解はクールノーのそれに類似しており、「経験的關係」の要請や、対象とする

人々とのコミュニケーションの要請を、数学的定式化より優先した。数学的言語による経済学の書き換えが、「知的ゲームや訓練問題を扱う方向に我々を誤り導く」ものと危惧したのである。また、別のところでは、数学の有用性にかんする見解を次のようにまとめている。「ある優れた数学定理によって経済学の仮説が定式化できる場合でも、それが経済学として優れていることは稀であると、ますます感じるようになった。だから数学の利用について、自分では次の規則を守るように努めている。(1) 数学は速記としてのみ使用し、研究の原動力とするな。(2) 結論に到達するまでの間だけ使え。(3) 英語の記述に翻訳せよ。(4) 実際の生活から得られる重要な事例でもって例証せよ。(5) それが出来たら数学の定式を焼却せよ。(6) もし(4)の課題をうまく解決できなかったら、英語の記述も焼却せよ。この最後のことはしょっちゅうやったことだ」。

マーシャルの見解を紹介したのは、イギリスの経済学者にたいするその影響の大きさからであり、これが今日まで続いているからである。さらに、その見解はワルラスとも、ジェヴォンズとも、現代アメリカの主流派のそれとも異なっているからである。マーシャルの伝統の影響の強さを例証するものとして、ワルラスやサムエルソンとともに「新古典派的三位一体」の一翼を構成するヒックスを引用してみたい。ヒックスの時代を画する著作(1939年)は戦争前にアメリカに紹介され、数理経済学を専攻する者の基本文献の一つになった。ヒックスが最初にアメリカを訪問した時(1946年)には、一般均衡の分野で研究するほぼすべての代表的な経済学者と会っている。ヒックスはこの訪問と会見を回想して次のように述懐している。「彼等を失望させたのではないか、あれ以後も失望させ続けているのではないかと思う。重要な成果を達成しはしたが、それは私の研究方向に沿うものではない。アメリカの経済学研究者の一つの潮流を特徴づける自己目的な理論追求には、違和感を覚える。...現実との関係維持を軽視する計量経済学も、信頼しがたい」。

経済学方法論を研究するローゼンベルグは、アローやデブリューやその追随者は、現実経済を扱う「現実科学」から、「政治哲学」や「応用数学」の一分野へと経済学を変形させたと主張する。誇張があるとはいえ、当を得ていないとは言えないだろう。ローゼンベルグによれば、一般均衡論が主張していることは、「事前調整できない利己的で意図しない諸結果が、人間の必要充足にたいする資源の狭隘性により、もっとも効率的な資源利用を導く」という命題(現代の科学では証明不能な - 筆者)以外の何物でもない。

ここで、ノイマンに立ち戻り、彼の頻繁なウィーン訪問が、モデルの経済学的解釈に及ぼしたであろう影響を分析してみたい。

ウィーン・コネクション

一般均衡モデルへのウィーン・サークルの関心は、オーストリア学派の帰属理論の研究から膨れ上がった⁽¹⁵⁾。オーストリア学派を形成した老メンガー（1871年）は、消費者の必要充足への直接的貢献度（ヒエラルヒー）⁽¹⁶⁾に従って、商品を最終財（消費財と資本財）と生産要素（種々の段階にある高次財）に分類した。オーストリア学派の価格理論によれば、最終財の（相対）価格 $p=(p_i)$ を決定するのは限界効用比率であり、希少な生産要素の支出比率 $G=(g_{ki})$ が分かれば、これら二つの情報から生産要素の価格 $r=(r_k)$ を「遡って計算（帰属計算）」できるという。すなわち、

$$r_1 \cdot g_{1i} + r_2 \cdot g_{2i} + \dots + r_k \cdot g_{ki} + r_m \cdot g_{mi} = p_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

と表すことができ、行列代数を使えば、方程式体系は $rG=p$ と書ける。より正確に言えば、これを ex post 型モデルの決定問題と解釈すれば、条件付きの恒等式として解することができる。この方程式体系の数学的性質を分析していたウィーン・サークルのメンバー（経済学者メイヤーのサークルにも属していた）は、ex post と ex ante の区別とその重要性について配慮しなかった。ウィーン・サークルには、やはりハンガリー人で銀行家（アマチュア経済学者）のシュレジンガーも参加しており、後の理論的發展に決定的な役割を果たすことになる。メイヤー・サークルのメンバーは、この価格決定の原理には、数学的観点からトリヴィアルでない問題が含まれていることを認識していた。すなわち、この方程式体系が正則（ $n=m$ ）である、つまり希少生産要素の数と最終財の数が等しいことが何によって保証されるのか、またもしそれが保証されても非負の解はどのように保証されるのか、という問題がそれである。オーストリア学派は上記の体系を ex post 的性格のもととして解釈していたが、このような問題提起それ自体は ex ante 型モデルの視角を反映していることに注意されたい。

こうして、価格の帰属計算問題は、価格決定方程式の正則性の欠如と、経済学的に無意味な解の可能性（いくつかの生産要素価格が負になる潜在的可能性）の困難にぶつかった。この問題を解決するために、ウィーン・サークルはカッセルの一般均衡理論モデルに関心を向けることになった⁽¹⁷⁾。

カッセルは単純再生産が持続する経済の均衡⁽¹⁸⁾を、必然的に正則になる方程式体系で描き、価格の帰属計算公式を生産要素の需給方程式で補足したのである。カッセルもまた、ex post 型モデルの視角に立っており、それゆえモデルが希少生産要素のみ含むことを前もって前提した。そのモデルは次のような形式をもつ。

$$rG=p, \quad Gy=g, \quad \text{ただし、} y=y(p).$$

ここで、 y は最終消費、 g は生産要素の在庫ベクトル、 $y(p)$ は零次同時の需要関数である。

ウィーン・サークルのメンバーは、「カッセルの名案」（Punzo、1989年）、つまり方程式体系の正則性の設定が、価格帰属計算問題を解決するものと考えた。ところが、カッセル・モデルへの適応プロセスの中で、シュレジンガ

ー（1935年）は一見して何ともないような理解で、需要関数を「ひっくり返した」のである。すなわち、オーストリア学派のアプローチにしたがって、直接的な需要関数 $y(p)$ に代えて、その「逆」の需要体系 $p(y)$ の形式を採用したのである。ここから、カッセル-シュレジンガー-ワルドのモデルでは、生産物価格の代わりに、最終消費が変数になった。この一見して変哲のない形式的修正は、内容と方法論において本質的な帰結をもたらすことになった。

カッセル・モデルでは、要素価格(r)が一義的に最終財価格(p)を決定し、この最終財価格は（仮説によって供給と一致する）需要(y)を決定し、さらにこの需要が生産要素の需要 (Gy)を決定する。すなわち、カッセル・モデルは $D(r)=g$ の形式をもち、希少生産要素の市場問題に還元することができ、正則性をもち続ける。このように、均衡状態を記述する還元方程式体系の正則性が、方程式の数え合わせの原理によって、カッセル・モデルの論理的一貫性を「証明した」のである⁽¹⁹⁾。

これにたいして、シュレジンガーによって構造変更されたワルラス-カッセル・モデルは、上記のように還元できない。ここでは、最終財と価格との関係 $rG=p(y)$ と、生産要素の需給関係 $Gy=g$ が、そのまま一緒にモデルの「最終形式」を構成する。このモデルも同様に正則方程式体系であるが、「ウィーンのジレンマ」を解決するものではない。いま、 y を $Gy=g$ の条件を満たす（非負の）生産ベクトルとしよう。この関係式を需要関数に代入し、価格ベクトルを決定しよう。もし最終財の数と生産要素の数が等しくなければ、生産要素価格を決定する方程式体系 $rG=p(y)$ は、出発点であった帰属価格計算の方程式と同様に、過少ないし過剰決定であり続ける。つまり、「カッセルの名案」は、シュレジンガーにとって、価格の帰属計算問題の解決を与えない。

カッセル・モデルでは出発点の（構造的）方程式体系の潜在的な矛盾は、いくつかの要素における負の価格として現れた。他方、シュレジンガー・タイプの体系では、その矛盾が方程式体系 $rG=p(y)$ の非正則性として現れるのである。

ワルラス-カッセル・モデルで負の生産要素価格が生じる可能性については、他の論者も注意を喚起していた⁽²⁰⁾。ツオイテン（1933年）とは独立して、シュレジンガー（1935年）は、数理計画法で今日知られる補間法原理を利用して、問題解決を図った。方程式体系に代えて不等式体系を導入することで、方程式の解法において完全に利用されない生産要素の価格を、ゼロとするのである。

$rG=p, Gy \leq g$, ただし、 $p=p(y)$ の場合、 $rGy=rg$ となる。

変数が非負に設定された上記のモデルの枠組みの中で、ワルド（1935年）は、ノイマンに次いで歴史上二番目に、そしてノイマンとは独立に、一般均衡存在の可能性を証明したのである。こうして、シュレジンガーとワルドは、「二重のスウェーデン転回」（カッセルによる補足条件と需要関数の逆転）

によって、カッセルの帰納的-直感的な ex post 的性格をもつモデルを、ヒルベルト・プログラムの精神による公理的-演繹的-仮説的な ex ante 的視角をもつモデルに転換したのである。もちろん、このような方法論的な転換について、彼等自身それほど注意を払っていなかったと思われる。なぜなら、時代精神がそのようなものであり、彼等にとってもそれは当たり前のことだからである。ノイマン・モデルとカッセル-シュレジンガー-ワルド・モデルは、ex ante 的視角の点においても、数学的記述の点においても、相互に親近性があると言える。ノイマンは ex post 的視角から記述された (1/a) と (2/a) のモデルに代えて、同じ構想にもとづき、以下のような対称的な代替アプローチを内包する不等式体系を導出したのである。

$$Kq \geq \cdot Dq, pK \leq \cdot pD, \text{ ただし、} pKq = \cdot pDq,$$

ここで、 p と q は非負のベクトル、 \cdot は正のスカラー、係数行列の「分解不可能性」⁽²¹⁾により $pKq > 0$ となり、これによって、共通の利子-成長要因 () を作用させることができる。

他方、これら二つのモデルの数学的証明、経済学的構成と内容は、同じセミナーで同じ刊行物のシリーズで陽の目を見たという共通の起源を否定するほどに、相互に異なるものである。さらに興味深いことは、ノイマンもワルドも互いの研究に触れていない点である⁽²²⁾。ノイマンの論文が含まれていた雑誌の編集者がワルドであったのにもかかわらず、である。このことは、二つの研究が相互に完全に独立して準備されたことを物語っている。

ここで簡単に、ノイマン型 (N) モデル、ワルラス-カッセル型 (WC) モデル、カッセル-シュレジンガー-ワルド型 (CSW) モデル相互の本質的な差異について列挙するが、そこからも明らかのように、ノイマン・モデルが後の発展に繋がる天才的な考察を秘めている点で、数理経済学の観点からはるかに興味深いのである。

- (1) N モデルは擬似定常的であるが、多期間分析であり、したがって成長の潜在性と利潤率との関係を分析することが可能であるのにたいし、CSW モデルは静学的である。
- (2) N 型成長経路 (生産構造) は後になって多くの興味深い経済学的特性をもつことが発見された。たとえば、ターンパイク定理、それと同類の標準商品、マルクスの転形問題に正しい解を与えるウェイト体系などがそれである。
- (3) N モデルでは生産構造と価格は完全に数学的な双対性をなしており、線型計画法の双対性定理を投影しているのにたいし、CSW モデルはこの面では非対称的である。
- (4) N モデルで、経済学史上初めて、技術の記述として線型活動分析モデルが現れたが、これが通常的分析手段として理論的な裏づけを得るのは漸く 1950 年代に入ってから (Koopmans, 1951 年) であり、それによって経済学は結合生産や技術選択を分析の視野に入れることが可能になった。

これにたいして、CSW モデルの技術はそのような発展の可能性を孕んでいない。

- (5) やはり経済学史上、初めてノイマンが、効率的な生産の活動選択と均衡（効率的）価格体系の決定が相互に前提し合う問題と認識し、これを定式化した。
- (6) N モデルは（実用的に利用されてきた投入産出モデルと同様に）、循環的な生産関係を描写するのにたいし、CSW モデルにはそのような関係は存在しない。
- (7) ワルドが帰納法による伝統的な解法を採用したのにたいし、Nモデルの解の存在は不動点定理⁽²³⁾によって証明された。もっとも、このモデルの場合、不動点定理によらなくても証明可能（事後的に見れば、あまりに強力な手段であったと分かるが）であるが、後の新古典派の一般均衡モデルでは不可欠の手段になった。
- (8) ノイマンはそれ以前のゲーム理論モデルを解釈し直すことで、経済均衡とゲーム理論の解法が数学的に同値であることを示した⁽²⁴⁾。

カッセル動学モデルとの比較

周知のように、カッセルはまた経済均衡モデルの中にいかにして時間要素を明示的に組み込むかという問題、つまり静学的で「非時間的な数学構造」を時間次元で展開する問題に取り組んでいた。その意味ではノイマンと同じ様に、しかしながらその定式化や分析なしに、カッセルは多期間で斉一的に拡大する経済を描いた。この事実をもって、多くの論者はカッセルの試みがノイマン・モデルに直接・間接のインスピレーションを与えたことを証明しようと試みている。しかし、カッセルはノイマンとはまったく異なる視角に導かれ、斉一的に拡大する経済の条件をまったく別様に解釈していることを考えると、この試みは説得力に欠ける。そこで、いま少し、この問題を考察してみたい。

カッセルは、生産物を本源的な生産要素から直接的に作られるものと仮定しており、行列Gを構成する係数はその単位投入要件を含む（レオンチェフ・モデルの精神では、行列Gの要素は直接・間接の完全投入係数として解釈できる。この問題は後に再び触れる）。この仮説に従えば、カッセル・モデルの生産水準とその時間的増加を制限するものは、専ら本源的生産要素の量ということになる。カッセルは本源的生産要素の増加率を経済の外から外生的に付与されるものとして扱い、それぞれの要素は同じ比率で増加すると仮定した（ $g_{t+1} = \cdot g_t$ ）。

不変の技術と価格構成、およびここから導かれる不変の最終消費構造を前提すると、生産と消費（ $\cdot y_t$ ）ならびに生産消費（ $\cdot Gy_t$ ）のすべての構成要素は、外生的に決定される比率で増加できる。簡単化のために、相互に継起する二つの期間だけを考え、期間を表す添字を省こう。斉一成長の結果、

生産要素の需給均等式の両辺は、正の同じ成長要因で乗ぜられる ($\dot{G}y = \dot{g}$)。したがって、この静学から定常モデルへの転換において、均衡条件は数学的観点から不変のままに留まる。

カッセルは慣習的な「1年回収」を仮定することで、モデルを動学化させる。つまり、生産と生産的消費の間に一期のラグを仮定する。これに従い、費用の計上 (rGy) と所得 (py) の実現の間にも、一期の乖離が生まれることになる。それゆえ、所得は費用に上乘せされた利子を含んでいなければならない。したがって、価格を決定する関係は、 $rG=p$ を利子要因とすれば、 $rG=p$ の形をとる (結局のところ、静学モデルと比べて、これが唯一の変更となる)。次期における所得と支出の均等の仮定 ($py = rGy$) により、利子要因は外生的な成長要因と一致しなければならない ($=$)。この結果、斉一成長において、均衡の数学的諸条件は価格方程式の右辺のみが、静学モデルより定数の要因だけ乖離することになる。

$$\dot{r}=p, Gy=g, \text{ ただし、 } y=y(p)$$

いまだ行列代数による速記手段をもっていなかったカッセルが、自明な方程式体系を何度も書き上げるという手間を省いたことに、驚く必要はない。同時に、ここまでの導出から明白なように、カッセルの斉一成長モデル (Cモデル) は、その数学的形式においても経済学的内容においても、完全にノイマン (Nモデル) のものとは異なっている。

それでは、二つのモデルのもっとも重要な構想上の差異は何であろうか。

- (1) 既述した CSW モデルとの比較で列挙した差異がすべて当てはまる。
- (2) Cモデルの暗示的な目的関数は、最終消費の最大化であり、これが生産要素の狭隘性を惹き起こす⁽²⁵⁾。これにたいし、Nモデルでは斉一成長率の最大化が暗黙の目的であり、これが再生産される生産要素 (資本財とそれと一体になって生産に引き込まれる労働力。潜在的に利用可能な労働力ではないことに注意) の狭隘性を惹き起こす⁽²⁶⁾。
- (3) 以上の諸関連にもとづけば、Cモデルでは、形式的には同時決定される生産物価格が (シュレジンガー問題の分析を参照のこと)、需要関数より導出され、生産要素価格はここから帰属計算されたものと見なされる。これにたいして、Nモデルでは生産物と生産要素は同じタイプの財であり、その相対価格は (成長観点より) 効率的なプロセスの最小費用⁽²⁷⁾が決定する。
- (4) Cモデルでは成長-利子要因は外生的であるのにたいし、Nモデルでは内生的である。
- (5) Cモデルでは本源的生産要素の増加が成長率を決定するのにたいし、Nモデルでは商品生産の下位システム内部の「効率性」、つまりどのような自家消費率⁽²⁸⁾によって社会が生産物を再生産できるかが、これを決定する。

- (6) N モデルと異なり、C モデルでは貯蓄と投資の形成、あるいはこれに関連する生産要素の増加について、何も語っていない（したがって、ワルラスやオーストリア学派と同様に、最終消費において、消費財需要と投資財需要の双方が、投資や貯蓄の説明なしに、一緒に現れる）。
- (7) C モデルでは成長要因と利子要因は必然的に等しくなるが、利潤は存在しない。あるいは、オーストリア学派の資本理論（ベーム-バヴェルク）のように、利潤を投資された（金融）資本の利子にほかならないとすることもできる。N モデルの利子率は、一般的な分析においては、古典派の利潤率として解釈することができよう。

この最後の命題、つまり N モデルにも見られる成長要因と利子要因の同一性にかんする古くて興味深い経済仮説（Schumpeter、1954 年）は、少し詳しく検討するに値する。

ノイマン・モデルの分析から、この問題への回答を得ることができる。ノイマンは必要充足を超える所得が貯蓄され、生産に回されることを明示的に前提している。ここから、成長要因と利子要因の同等性が直接的に結論される（産出価額 pKq が正であることを保証する分解不能性の制約により）。確かにノイマンは利子について語っている（そこにはオーストリア学派とスウェーデン学派の影響が見られる）が、利子の代わりに古典的な意味での利潤概念を使用することは、モデル解釈として可能である。モデルの条件を修正して、奢侈財を導入すれば、成長率と利潤率が相互に乖離する。また、経済が単純再生産を行う場合（成長率がゼロ）でも、利潤は発生する。

この最後の場合、生産費用を決定する投入行列 D に加えて、特別な消費行列 F （ただし、 $D \leq F$ ）を導入しなければならない。これにより、モデルの基本不等式体系は次のように変化する。

$$Kq \geq \cdot Fq, pK \leq \cdot pD, \text{ ここで、 } pKq = \cdot pFq = \cdot pDq.$$

ノイマン・モデルをこのように一般化した場合、当然のことながら、あの美しい対称的な双対性が失われ、モデルの数学分析そのものも難しくなる。ノイマン・モデルのこのような、あるいはこれと類似した非対称的な拡張は、非常に興味深い課題である。新古典派の数学的分析と競い合うネオリカード派の優れた業績が、このことを証明している⁽²⁹⁾。筆者自身の考えでは、ノイマン・モデルの最大の弱点の一つは動態のプリミティブな取り扱いであり、同一の周期性と同期された（一斉に開始される）生産過程の仮説にある。これらの仮説を緩めることで、モデルははるかに現実味を帯びることになり、回収問題や経済循環の分析に応用することも可能になる⁽³⁰⁾。

生産の循環性：古典派と新古典派の分析の分岐点

カッセルの動学モデルとの比較から言えることは、我々のこれまでの見解を再確認できたということである。つまり、カッセルとノイマンのモデルは相互に代替的なものではなく、補完的なものである。このことを証明するた

めに、思考実験してみたい。もし 20 世紀初期の時代に学問業績のコミュニケーションが今日ほどに速く、カッセルやその弟子たちが、後にレオンチェフ（1928、1941 年）の投入産出モデルへと導いたドミトリエフ（1905 年）、シャラシヨフ（1910 年）、ペロン（1907 年）、フロベニウス（1908、1909、1912 年）などの業績に接する機会があったとしたらどうだっただろうか。

これらの成果を知っていたとしたら、希少生産要素のうち蓄積された資本財や内部で「人工的」に作られた資源を、自然（外生）的資源とは切り離して、明示的に表現するように、モデルを変更することができたであろう。生産物投入の正方行列 $A = (a_{ij})$ を導入しよう。1 年の回収期間を前提して、この行列が同時に単位資本係数行列でもありとしよう。 $a = (a_i)$ を前期の生産から蓄積され資本財として機能する商品在庫ベクトル、 $x = (x_i)$ を粗生産ベクトル、 $q = (q_i)$ を資本財の均衡価格（生産要素の限界賃料のような！）ベクトルとする。これらの要素で拡張されたカッセルの静学モデルは、次のように描くことができる。

$$Ax + y = x, Ax = a, pA + qA + rG = P, Gy = g, \text{ただし、} y = y(p).$$

このモデルでは、変数 (x, p, q, r) の数と方程式の数的一致する。もっとも、均衡の仮定により、当該の資本財の収益率（賃料率 q_i と生産物価格 p_i の比率）は、同じでなければならない。つまり、 $q = p \cdot$ を一様な均衡収益率とすれば、 $q = p \cdot$ の条件を維持しなければならない。ベクトル変数 q をスカラーで、価格決定方程式を

$$p = (1 + \dots) \cdot pA + rG$$

で置き換えなければならない。ここから、誰も取り上げなかった興味深い関係から、いくつかの重要な結論が導かれる。

第一に、これまでの記述に従って修正された方程式体系

$$Ax + y = x, Ax = a, (1 + \dots) \cdot pA + rG = P, Gy = g, \text{ただし、} y = y(p)$$

は、過剰決定になる（方程式の数が変数の数より多い）。明らかに、これは賃料率決定の整合性に問題があることを示している。

第二に、生産の循環性を考慮し、長期均衡を前提すれば、古典派の利潤率が必然的に価格決定関係に現れてくる。

第三に、 $p = (1 + \dots) \cdot pA + rG$ という関係にたどり着いたが、これは他でもない、古典派（リカード、トレンズ、マルクス）によって生産価格と名づけられた価格決定式であり、それを幾分か一般化したものである⁽³¹⁾。この特別なケースについて、レオンチエフ、ブローディ、スラッフア、ノイマンなどが、それぞれ異なる仮定のもとで、数理経済学的視点から厳密に分析している。そのうちの一つの成果として、ペロン-フロベニウスの定理を援用することで、自家消費率、つまり行列 A の最大固有値 λ が、利潤率の自然的上限を設定する（ $\lambda \leq 1/(1 - \dots)$ ）ことが示される。

これまで明示的に取り上げられず、別の形式で処理されてきた整合性問題の解決を、新古典派は別の方向に向かって探ってきた。すなわち、長期の均

衡状態の分析の代わりに、一時的均衡や異時点間均衡の分析に注意を払ったのである。この切断された古典派の糸を再び縫い合わせたのが、スラッファの影響を受けたネオリカード学派であり、それ以前には、マルクスの価格・再生産理論の現代的再構成に携わった研究者がこの方向を追求していた。

結論に代えて

ここまで、かなり徹底してノイマン・モデルを様々な視点から見てきたが、経済理論史上におけるノイマンの位置を確定するには、多くの糸で繋がった歴史を辿ることによってのみ可能であることが理解されたと思う。結びとして、主題に取り上げた問題に戻って、それに答えなければならない。はたして、ノイマンのモデルは古典派の発想にもとづくものなのか、それとも新古典派の発想と見なし得るのだろうか。注意深い読者は、「その両方でもあり、その両方でもない」という筆者の回答を予想されるだろうが、私見を曖昧なままにするのは本意でない。

ノイマン・モデルは、経済学的思考に深く根ざす、きわめて古くからあるアイデアの抽象的で数学的なメタファーである。このアイデアは純粹かつ合理的に機能する商品経済のイデアル（理想型）である。この理想的な経済は合理的な分業にもとづいて機能しており、相互に経済的に分離された個人と（あるいは）集団がその経済過程を動かし、相互の利害の調和と経済効率を保証するような制度とメカニズムの中で、市場で相互に商品を交換し合う。

純粹で合理的な経済価格（交換価値）は、長期の平均において、使用された生産手段を補填し、かつ商品生産の参加者の「実質」生存を可能にし、常に後世代の生活水準が高くなるよう蓄積の基礎をカバーするものでなければならない。簡単に確かめることができるように、ノイマンの均衡価格はまさにこの原理を保証するもので、すべての活動が機能すれば、補填と釣り合いのとれた発展をカバーするものである⁽³²⁾。生産の自然的条件にかんして言えば、純粹で合理的な経済メカニズムは、物的資材の生産が相互に調和的で、釣り合いが取れて、かつ可能な限り速いテンポで増加するメカニズムを保証しなければならない⁽³³⁾。

このように考えると、これらの基本的な人間的原理を表現する諸価値の中で、それぞれの学派がどの価値を強調するのか、あるいはどのような価値を暗示的に示しているのか、その度合いによって、ノイマン・モデルは古典派であったり、新古典派であったり、あるいはマルクス的であったり、社会主義的であったりする。

他方、ノイマン・モデルはどれほど現代経済の現実を反映しているだろうか。この問題については、独立した一章が必要になるだろう。ただ、周知のように、抽象的モデルを定式化し始めた 1920 年代末のノイマンは、いまだヒルベルト・プログラムを固く信じ、「真実」を導く演繹的-仮説的理論化の道を歩んでいた。しかし、後の仕事や言明から明らかのように、ゲーデルの定

理に出会った後は、この信念や情熱を失っていった。アルゴリズム化が可能で、実際の課題の解決に役立つ問題を意識的に探求するようになったことも、そのことを明らかにしている。

ノイマンもワルドも抽象経済の均衡理論の研究を続けなかったのは、偶然ではない。二人とも、比較的早い時期からアメリカの「数量経済学の賢人たち」の周辺に集まる研究者と密接な関係を築いていた。コールズ委員会の「選ばれた賢人たち」の研究室から、新古典派一般均衡の現代的理論モデルと存在証明が生まれた。しかも、そこではノイマンの手法の革新性を追及し、かつそれを発展させる試みが行われていた。にもかかわらず、ノイマンはこの問題に深入りすることはなかった。「バロック的な廃類」に向かい、経験的実証的な足場を失ったような課題の追求に、天より授かった類稀なる才能を浪費してはならないという天才の直感が働いていたのかもしれない。それは誰にも分からないが、このノイマンの決断によって、人類はより大きなものを勝ち得たことは確かである。

このようなやや高慢な言明や、本稿のこれまでの展開で示された筆者の不満から、自らが専攻する学問分野や活動を責めていると考えてもらいたくない。そうではなく、水が半分入ったコップを見て、半分は空だと言っているにすぎない。他方、筆者の不満は数理経済学ではなくて、経済学の発展水準にある。もちろん、「すべての科学はこのように始まり、科学としての経済学もわずか数百年の歴史しかもたない」にもかかわらず、分析対象はきわめて複雑であり、「本質的な概念構成、実際に使用できる思想を発展させるような研究が、多く必要とされている」（ノイマン、1955、1965年）ことは、理解している。このような展望から達成された成果を描こうとすると、きわめて暗いものになってしまいそうだが、そのことは別の機会に、あるいは別の論者に任せたい。

筆者の狭い専門領域である数理経済学にかんして、それぞれに持論があり、気質や精神的な態度、数学や（あるいは）経済学の知識、経験、嗜好など諸々のものが反映した、いわば「独特な」見解もあり得る。科学理論や方法論を専門的に扱っている研究者もかなり多くが見解を発表しているし、この問題にかんする非常に多岐にわたる見解が収集されてもいる。持論をもつ人も、これらの中から、自らの見解に一番近いと感じられる、綺麗に彫琢された文言を、必ず見つけることができよう。筆者自身も多くのものを集めてみたが、最後にブローグの見解を引用することで、終わりたい。

「一つの〈理論〉が重要な問題に注意を喚起しているとすれば、...まだ検証されていないという理由だけで、排除されてはならない。...経済学者が往々にして自縄自縛に陥り、レオンチェフが名づけたような〈暗黙の神学化〉とトートロジーにはまり、経済学知識への本質的な貢献を犠牲にしていることに、議論の余地はない。しかし、このような行為の癒しは目的の明確化

で達成され、必ずしも急進的で焦った手術が必要なわけではない」(Blaug、1962年)。

注

- (1) ノイマン・モデルの理解にかんして、直接・間接にブローディから多くのインスピレーションを得たことを記しておきたい。
- (2) この詳しいプロセスを扱っているものに、Punzo(1989)、Weintraub(1985)、Weintraub-Morowski(1994)がある。
- (3) Kornai(1980)の意味で使う。メタ理論モデルではなく、応用を目指すモデルを現実科学と理解する。
- (4) 数学を「現実」から完全に切り離すブルバキ学派がフランスではなくハンガリーの学派であったとしたら、このボヤイの言葉が学派のモットーになっていただろう。
- (5) 委員会の最初の20年について、Christ(1952)が詳しい。
- (6) この過程の中で、均衡、安定、動態やそれらにかかわる分析が、極度に限定された狭い概念内容を与えられたことについて、Weintraub(1991)が詳細に叙述している。
- (7) 1970年代から1980年代にかけて、経済学方法論の専門家が増え、その出版物も多くなった。1984年から1993年にかけて、このテーマにかんしておよそ50冊の専門書が出版された(Backhouse,1994aがこれを概観している)。その中で、とくに注目すべきは以下の著作である。Rosenberg(1976,1992)、Blaug(1980)、Hausman(1981-1991)、Hutchison(1992)、McCloskey(1986)、Tool-Samuels(1989)、Lavoie(1990)、Backhouse(1994b)、Nagy Aladár(1997)。
- (8) ゲーム理論との関係について、Kemeny-Morgenstern-Thompson(1956)とDore(1989)が詳しい。さらに、熱力学のポテンシャル関数との関係については、Bródy(1986)が詳しい。
- (9) 無償廃棄という許容できない無意味な条件が維持される場合に、負の価格が自然に生じてくるのであって、この点でノイマンは正しくなかった。
- (10) イデオロギー的な狭隘さから、多くの研究者がマルクスを古典派から排除していることに注意したい(「古典派」と「マルクス」というように)。
- (11) Lakatos-Musgrave(1970)、Lakatos(1978)を参照されたい。
- (12) たとえば、Salvdori-Steedman(1990)、Kurz-Salvadori(1995)が、この文献リストに詳しい。
- (13) ワルラスとジェヴォンズが共同で編集・収集した、数学的定式化が適用可能な経済問題リストは、およそ70の定理を含んでいる。
- (14) これに関連して、Weintraub(1991)の議論は興味深い。彼によれば、当

時、英国の物理学と数学が大陸のそれより遅れていたことが、マーシャルの保守主義の背景にあるという。

- (15)詳しくは、Punzo(1989)、K.Menger(1973)、Mátyás Antal(1992, 1996)を参照されたい。本稿のこの項は、多くの点で Punzo の分析に依拠している。
- (16)このような商品の機能的分類は一義的に行えない。なぜなら、多くの財は使用領域に従って、最終消費としても生産要素としても利用されるからである。この問題については、後に触れることにする。
- (17)カッセル・モデル(1918)は多くの観点から、ワルラス理論の簡便化されたバージョンだと理解できる。同時に、カッセルはワルラスについてまったく触れていないことや、効用概念を使用していないことに注意されたい。
- (18)カッセルは均衡の静学的方程式を、長期の平均にある経済の「無時間的な数学構造」として理解した。これにたいして、ヴィクセルは同じものを経済の定常的均衡条件と見なした(Ingrao-Israel, 1990を参照)。
- (19)もし所与の方程式体系で正の解が存在しない場合、カッセルにおいては、それはモデルの特定化に失敗したことを意味するにすぎない。というのは、その場合にはすべての希少生産要素を含んでいないか、希少生産要素以外のものを含んでいるからである。
- (20)たとえば、Wicksell(1919)、Neisser(1932)、Stackelberg(1933)、Zeuthen(1933)。
- (21)ノイマン・モデルにおける分解不能性概念およびその可能な一般化については、Gale(1968)、Móczár(1995, 1997a)を参照されたい。
- (22)二つの研究が同じシリーズの刊行物に掲載されたのは、同じような問題を同じような視点から分析していたからで、ノイマンは密に連絡を取り合っていたメンガーからそのことについて連絡を受けていたからだろう。
- (23)ノイマンはブラウアー型の不動点定理を集合値への写像に拡張した。この成果を、Kakutani(1941)がノイマンとの議論にもとづいて一般化し、その証明を簡便化した。以後、この角谷の定理が広まり、標準的な定理となった。
- (24)Nash(1950)が二人ゲームを一般化し、これが後のゲーム理論研究の一つの基本定理になっただけでなく、アローとデブリューはこの助けを借りて、彼の均衡モデルの解の存在を証明した(Szép Jenő-Forgó Ferenc, 1988; Zalai, 1989を参照)。
- (25)カッセルは効用概念や効用関数を使用しないが、それはモデルの観点から見ると本質的なことではない。彼の需要関数はアグリゲートされた水準のものと考えることができるので、振る舞いの良い効用関数の最大化から導出される新古典派需要関数が備えるべき数学的特質を満足する必

要がないのである。

- (26) 生産された資本財の構造をその費消充足と調和させることが可能で、均衡においては狭隘な生産要素の場合でもこの調和が成り立つので、この生産要素の相対的な狭隘度は、ノイマン・モデルでは利子要因と一致する。これはたいへん興味深い点で、注意を喚起したい。この自己収益率の同等性は、ノイマンが出発在庫を考慮しなかったことの帰結として導かれる。無限時間の異時点間均衡の新古典派モデル (Malinvaud, 1953) と異なる点である。筆者の評価によれば、その表現形式の優劣にかかわりなく、この差異は明らかにノイマンに分がある。
- (27) この古典派に近い解釈は、ネオリカード派の「費用最小化の価格体系」概念によって説明される (たとえば, Kurz-Salvadori, 1995)。
- (28) 結合生産や技術選択が存在しない場合には、分解不能性の仮説のもとで、ノイマンの成長要因は、完全投入係数行列 (この場合は正方行列) D の最大固有値 (自家消費率) の逆数になる。この周知の現象にもとづき、ノイマン・モデルの成長要因を、固有値 (Perron-Frobenius 根) の一般化と見なすことができる (Punzo, 1980)。
- (29) スラッファに従い、ネオリカード派 (修正古典派) がこの道を歩んでいる。詳しくは Zalai(1989)。また、非対称的ノイマン・モデルにかんしては、Łoś-Łoś(1974)および Łoś-Łoś-Wieczorek(1976)を参照のこと。
- (30) 回収現象が経済循環の特徴やヴァリエーション、性格に及ぼす影響については、Bródy(1995, 1997)の研究と 1969 年の著書を参照されたい。そこには、このテーマをさらに豊かにする独自の発想が散りばめられている。
- (31) より一般的には、 $pB = (1 + \dots) \cdot (pA + r_1G_1) + r_2G_2$ の形式で描くことができる。この形式では、本源的生産要素を二つのグループに分けている。最初のグループには前払いが必要な費用 (例えば、古典派やノイマンの労働力) が属し、二つ目のグループには生産物の販売の後に後払いになるもの (例えば、スラッファの労働力や古典派の地代) が属する。もう一つの差異は結合生産の可能性 (産出行列 B) で、ここでは均衡において採用される (効率的) 活動が記述されている。その意味で、ex post の記述である。係数行列の A と B は必ずしも正方行列ではない。
- (32) 価格を決定する最初の二つの要素は中世の公正価格概念である *justum pretium* を決めるものであり、少なくともアリストテレスの互惠原理まで遡ることができる。これを補完したのが市民階級で、蓄積スパイラルの始まりとともに、第三の要素である蓄積の要素が加わったのである。
- (33) レマクもまた、「相互に階層性」をもつ価格を「純粹で合理的」価格と名づけた。世界恐慌時には、レマクはまだ社会主義体制が資本主義経済体制より、経済をより純粹かつ合理的に組織できるという幻想をもっていた。彼はその幻想を捨てることになるが、「計画的で釣り合いのとれた発展」 (Szabó, 1964)、「労働に応じた分配」 (Szikra, 1978)、「社

会主義法則」などは、このような理想の反映である。

参考文献一覧

- Arrow, K. – Debreu, G. [1954]: Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica* 22, pp. 265-90.
- Arrow, K. – Hurwicz, L. [1958]: On the Stability of the Competitive Equilibrium, I. *Econometrica* 26, 522-52.
- Arrow, K. – Block, H. – Hurwicz, L. [1959]: On the Stability of the Competitive Equilibrium, II. *Econometrica* 27, 265-90.
- Arrow, K. [1989]: Von Neumann and the Existence Theorem for General Equilibrium. In: *Dore – Chakravarty – Goodwin* [1989], pp.15-28.
- Backhouse, R. E. [1994a]: Introduction: New Directions in Economic Methodology. In: Backhouse [1994b].
- Backhouse, R. E. (szerk.) [1994b]: *New Directions in Economic Methodology*. London: Routledge
- Barone, E. [1908]: *The Ministry of Production in the Collectivist State*. (angol kiadás in von Hayek, F. A., szerk., *Collectivist Economic Planning*. London: Routledge, 1935)
- Blaug, M. [1962]: *Economic Theory in Retrospective*. Homewood, Ill.: Irwin.
- Blaug, M. [1980/1992]: *The Methodology of Economics: How Economists Explain*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bortkiewicz, L. v. [1907]: Zur Berichtigung der grundlegenden theoretischen Konstruktion von Marx im 3. Band des Kapital. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 34, pp. 319-35. (angolul: On the Correction of Marx's Fundamental Theoretical Construction in the 'Third Volume of Capital'. In: P. M. Sweezy (szerk.), *Karl Marx and the Close of His System*. New York: Kelley, pp.199-221., 1907).
- Böhm-Bawerk, E. v. [1889]: *Kapital und Kapitalzins. Zweite Abteilung: Positive Theorie des Kapitals*. Innsbruck: Wagner (a 4. kiadás angol fordítása: *Capital and Interest*. South Holland, Illinois: Libertarian Press, 1959)
- Bródy András [1969]: *Érték és újratermelés*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Bródy András [1980]: *Ciklus és szabályozás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Bródy András [1986]: A fizikai gazdaságtanról. Neumann egyensúlyi modelljének félszázados évfordulójára. *Sigma* 19, 1-2, pp. 41-48.
- Bródy András [1995]: Növekedés, csőd és ciklusok. *Közgazdasági Szemle*, 7-8, pp. 650-666.
- Bródy András [1997]: A piac és az egyensúly. *Közgazdasági Szemle*, 9, pp. 739-755.

- Cassel, G. [1918]: *Theoretische Sozialökonomie*. Leipzig: Deichert (angolul: *The Theory of Social Economy*. New York: Harcourt Brace, 1932)
- Champernowne, D. G. [1945]: A note on J. von Neumann's article. *Review of Economic Studies* 13, 1, pp.10-18.
- Charasoff, G. v. [1910]: *Das System des Marxismus: Darstellung und Kritik*. Berlin: H. Bondy.
- Christ, C. [1952]: *Economic theory and measurement*. Chicago, IL: Cowles Commission.
- Cournot, A. A. [1838]: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. (angolul: *Researches Into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. New York: Macmillan, 1929)
- Dmitriev, V. K. [1898]: *Essay on Ricardo's theory of value* (eredeti oroszul, angol fordítás, in: Dmitriev, V. K., 1974)
- Dmitriev, V. K. [1974]: *Economic Essays on Value, Competition and Utility*. (angol kiadás, az eredeti orosz változat: 1904), szerk. D. M. Nuti. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dore, M. [1989]: The Legacy of von Neumann. In: *Dore – Chakravarty – Goodwin* [1989], pp. 89-99.
- Dore, M. – Chakravarty, S. – Goodwin, R. (szerk.) [1989]: *John von Neumann and Modern Economics*. Oxford: Clarendon Press.
- Dorfman, R. – Samuelson, P. A. – Solow, R. M. (DOSSO) [1958]: *Linear Programming and Economic Analysis*. New York-Toronto-London: McGraw-Hill.
- Duménil, G. – Lévy, D. [1984]: The Unifying Formalism of Domination: Value, Price, Distribution and Growth in Joint Production. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 44, pp. 349-71.
- Ekelund, R. B. – Hébert, R. F. [1997]: *A History of Economic Theory and Methods*. 4th ed., Toronto-London: McGraw Hill
- Frobenius, G. [1908, 1909]: Über Matrizen aus positiven Elementen I – II. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*.
- Frobenius, G. [1912]: Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*.
- Gale, D. [1960]: *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill, New York.
- Harcourt, G. C. [1969]: Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital. *Journal of Economic Literature* 7, pp. 369-405.
- Harcourt, G. C. [1972]: *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hausman, D. M. [1981]: *Capital, Profits and Prices: An Essay in the Philosophy of Economics*. New York: Columbia University Press.

- Hausman, D. M. [1991]: *The Inexact and Separate Science of Economics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hicks, J. R. [1939, 1978]: *Érték és tőke*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest (*Value and Capital*. Oxford University Press.)
- Hicks, J. R. [1984]: The formation of an Economist. In Hicks, J. R., *The Economics of John Hicks*. Oxford: Basil Blackwell, pp. 281-90.
- Hicks, J. R. – Weber, W. [1973]: *Carl Menger and the Austrian School of Economics*. Clarendon Press, Oxford.
- Hutchison, T. W. [1992]: *Changing Aims in Economics*. Oxford: Basil Blackwell.
- Ingrao, B. – Israel, G. [1990]: *The Invisible Hand: Economic Equilibrium in the History of Economic Science*. Cambridge: MIT Press.
- Jevons, S. [1871]: *The theory of political economy*. London: Penguin books
- Kakutani, S. [1941]: A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8, pp. 457-9.
- Káldor Miklós [1989]: Foreword. John von Neumann: A personal recollection. In: *Dore – Chakravarty – Goodwin* [1989], pp. vii-xi.
- Kemeny, J. G. – Morgenstern, O. – Thompson, G. L. [1956]: A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. *Econometrica* 24, pp. 115-35.
- Koopmans, T. C. (szerk.) [1951]: *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York: John Wiley and Sons.
- Koopmans, T. C. [1974]: *Contribution to General Discussion on Past and Future of the von Neumann Model*. In: $\Rightarrow \nabla - \Rightarrow \nabla$ [1974], pp. 3-4.
- Kornai János [1971]: *Anti-equilibrium*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Kornai János [1980]: *A hiány*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Kurz, H.D. – Salvadori, N.[1995]: *Theory of Production. A Long-Period Analysis*. New York: Cambridge University Press.
- Lakatos Imre [1978]: *Philosophical Papers*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakatos Imre – Musgrave, A. (szerk.) [1970]: *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lange, O. [1936]: On the Economic Theory of Socialism. *Review of Economic Studies*, 4.
- Lange, O. [1964]: *Politikai gazdaságtan I*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Lavoie, D. (szerk.) [1990]: *Economics and Hermeneutics*. London: Routledge

- Leontief, W. [1928]: *Die Wirtschaft als Kreislauf*. Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, 60, pp. 577-623.
- Leontief, W. [1941]: *The Structure of the American Economy*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Łoś, J- Łoś, M.W. (szerk.) [1974]: *Mathematical Models in Economics*. Amsterdam and New York: North-Holland.
- Łoś, J- Łoś, M. W. – Wieczorek, A. (szerk.) [1976]: *Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics, 1975*. Berlin: Springer.
- Lutz, F. A. – Hague, D. C. (szerk.) [1961]: *The Theory of Capital*. London: Macmillan.
- Malinvaud, E. [1953]: Capital Accumulation and the Efficient Allocation of Resources. *Econometrica* 21, pp. 233-68.
- Marshall, A. [1890]: *Principles of Economics*. (Reprint, 1977, London: Macmillan).
- Mátyás Antal [1992]: *A korai közgazdaságtan története*. Aula Kiadó.
- Mátyás Antal [1996]: *A modern közgazdaságtan története*. Aula Kiadó.
- McCloskey, D. N. [1986]: *The Rhetoric of Economics*. Madison: University of Wisconsin Press.
- McKenzie, L. [1954]: On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems. *Econometrica* 22, pp. 147-61.
- Menger, C. [1871]: *Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*. (Principles of Economics. 1981, New York-London: New York University Press).
- Menger, K. [1973]: Austrian Marginalism and Mathematical Economics. In: *Hicks – Weber* (eds.) [1973].
- Mirowski, P. [1988]: *Against Mechanism: Why Economics Needs Protection From Science*. Totawa, N. J.: Rowman & Littlefield.
- Móczár József [1995]: Reducible von Neumann Models and Uniqueness. *Metroeconomica*, 46, pp. 1-15.
- Móczár József [1997a]: Non-Uniqueness Through Duality in the von Neumann Growth Models. *Metroeconomica*, 48, pp. 280-299.
- Móczár József [1997b]: Growth Paths in the Leontief-type Dynamic Reducible Models (With a Case Study for Japan in the 60's). *Japan and the World Economy*, 9, pp. 17-36.
- Morgenstern, O. [1976]: Collaborating with von Neumann. *Journal of Economic Literature*, Sept., 14(3), pp. 805-16.
- Morgenstern, O. – Thompson, G. L. [1976]: *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies*. Lexington: Lexington Books.

- Morishima, M. [1961]: Proof of a Turnpike Theorem: The 'No Joint Production' Case. *Review of Economic Studies* 28, February
- Nagy Aladár (1997): *Az „értelmező közgazdaságtan" alapjai*. Miskolci Egyetemi Kiadó.
- Nash, J. [1950]: Equilibrium Points in N-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, USA. 36, pp. 48-9.
- Neisser, H. [1932]: Lohnhöhe und Beschäftigungsrad im Marktgleichgewicht. *Weltwirtschaftliches Archiv* 36.
- Neumann János [1928]: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, pp. 295-320. (Magyarul: A társasjátékok elméletéhez. In: Neumann [1965], 121-156. o.)
- Neumann János [1937, 1945, 1965]: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 8, pp. 73-83. (Angolul: A Model of General Economic Equilibrium. *Review of Economic Studies* 13, pp.1-9., magyarul: Az általános gazdasági egyensúly egy modellje. In: Neumann [1965], 160-176. o.)
- Neumann János [1947, 1965]: The Mathematician. In: Robert B. Heywood (ed.), *The Works of Mind*. Chicago: University of Chicago Press, 180-196. o. (Magyarul: A matematikus. In: Neumann [1965], 11-27. o.)
- Neumann János [1956, 1965]: Looking ahead. (Magyarul: A legújabb tudományos fejlődés hatása a gazdaságra és a közgazdaságtanra. In: Neumann [1965], 100-102. o.)
- Neumann János [1965] *Válogatott előadások és tanulmányok*. (ford. Augusztinovics M.) Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Nuti, D. M. [1987]: Dmitriev, Vladimir Karpovich. *The New Palgrave. A Dictionary of Economics*, edited by J. Eatwell – M. Milgate – P. Newman (szerk.) vol. 1, 907-10. London: Macmillan.
- Pasinetti, L. L. [1977]: *Lectures on the Theory of Production*. London: Macmillan.
- Pasinetti, L. L. [1981]: *Structural Change and Economic Growth*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Perron, O. [1907]: Zur Theorie der Matrizen. *Mathematische Annalen*, 64, pp. 248-63.
- Pigou, A.C. [1925]: *Memorials of Alfred Marshall*. London. Macmillan.
- Punzo, L. F. [1980]: Economic Applications of a generalized Perron-Frobenius problem. *Economic Notes*, IX.
- Punzo, L. F. [1989]: Von Neumann and Karl Menger's Mathematical Colloquium. In: *Dore – Chakravarty – Goodwin* [1989], pp. 29-65.

- Punzo, L. F. [1991]: The School of Mathematical Formalism and the Viennese Circle of Mathematical Economists. *Journal of the History of Economic Thought*, 13, pp.1-18.
- Radner, R. [1961]: Path of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem. *Review of Economic Studies*, 28, February
- Remak, R. [1929]: Kann die Volkswirtschaftslehre eine exakte Wissenschaft werden? *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 131, pp. 703-35.
- Robinson, J. V. [1953]: The Production Function and the Theory of Capital. *Review of Economic Studies*, 21, pp. 81-106.
- Robinson, J. V. [1962]: *Economic Philosophy*. Hammondsworth: Penguin Books.
- Rosenberg, A. [1976]: *Microeconomic Laws: A Philosophical Analysis*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.
- Rosenberg, A. [1992]: *Economics – Mathematical Politics or Science of Diminishing Returns?* Chicago: University of Chicago Press.
- Salvadori, N. – Steedman, I. (szerk.) [1990]: *Joint Production of Commodities*. Aldershot: Edward Elgar.
- Samuelson, P. A. [1947]: *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Samuelson, P. A. [1989]: A Revisionist View of von Neumann's Growth Model. In: *Dore – Chakravarty – Goodwin* [1989], pp. 100-22.
- Scarf, H. [1960]: Some Examples of Global Instability of the Competitive Equilibrium. *International Economic Review* 1, pp. 157-72.
- Schefold, B. [1989]: *Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays*. London: Unwin Hyman.
- Schlesinger, K. [1935]: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 6, pp. 10-11.
- Schumpeter, J. [1954]: *A History of Economic Analysis*. New York: Oxford University Press.
- Slutsky, E. [1915]: Sulle Teoria Del Bilancio Del Consumatore, *Giornale Dogli Economisti*, 51. (On the Theory of the Budget of the Consumer), in *Readings in Price Theory*, G. J. Stigler and K.E. Boulding, (szerk.) Homewood, Illinois, 1952, Chapter 2.
- Smolinsky, L. [1995]: Slutsky and Metaeconomics. In: Koropecykj, I. S. (szerk) *Selected Contributions of Ukrainian Scholars*
- Sraffa, P. [1960, 1975]: *Áruk termelése áruk révén. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest. (Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory. Cambridge: Cambridge University Press.)*

- Stackelberg, H. V. [1933]: Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4, pp. 456-72.
- Steedman, I. [1977]: *Marx after Sraffa*. London: New Left Books.
- Steedman, I. [1979]: *Trade Amongst Growing Economies*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Steedman, I. (szerk.) [1988]: *Sraffian Economics*. Aldershot: Edward Elgar.
- Szabó Kálmán [1964]: *A szocialista termelés alapvonásai*. Kossuth Kiadókiadó: Budapest.
- Szép Jenő – Forgó Ferenc [1988]: *Bevezetés a játékelméletbe*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó: Budapest.
- Szikra Katalin [1978]: A munkaszerinti elosztás és az áruviszonyok kapcsolatáról. *Közgazdasági Szemle*, 7-8, pp. 911-916
- Thompson, G. L. [1989]: John von Neumann's Contributions to Mathematical Programming Economics. In: *Dore – Chakravarty – Goodwin* [1989], pp. 221-237.
- Tool, M. R. – Samuels, W. J. (szerk.) [1989]: *The Methodology of Economic Thought*. 2nd ed., New Brunswick-Oxford, Transaction Publishers.
- Wald Ábrahám [1935]: Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 6, pp.12-18.
- Wald Ábrahám [1936]: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre (II. Mitteilung). *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7, pp. 1-6.
- Walras, L. [1874, 1877]: *Elements d'Economie Politique Pure. (Elements of Pure Economics*. London: Allen & Unwin, 1954).
- Weintraub, E. R. [1985]: *General Equilibrium Analysis: Studies in Appraisal*. Cambridge University Press.
- Weintraub, E. R. [1983]: On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930-1954. *Journal of Economic Literature*, 21, pp. 1-39.
- Weintraub, E. R. – Mirowski, P. [1994]: The Pure and the Applied: Bourbakism Comes to Mathematical Economics. *Science in Context*, No. 2., pp. 245-272.
- Weintraub, E. R. [1991]: *Stabilizing Dynamics: Constructing Economic Knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wicksell, K. [1893]: *Über Wert, Kapital und Rente. (Value, Capital and Rent*. 1954, George Allen & Unwin Ltd., London).
- Wieser, F.F. von [1989]: *Der Natürliche Wert. (angolul: Natural Value*. London: Macmillan, 1893.)
- Zalai Ernő [1988]: *Munkaérték és sajátérték*. Akadémia Kiadó.

- Zalai Ernő [1989]: *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- Zalai Ernő [1998]: Általános egyensúlyi modellek alkalmazása gazdaságpolitikai elemzésekre. *Közgazdasági Szemle*, 12, pp. 1065-81.
- Zeuthen, F. [1933]: Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4, pp. 1-24.